L'errore in matematica: alcune riflessioni

Rosetta Zan, Dipartimento di Matematica, Pisa

1. Introduzione

Non c'è materia scolastica in cui la paura dell'errore è così forte e radicata come in matematica.
Questo primato per alcuni è conseguenza della natura stessa della disciplina, caratterizzata da una rigida sequenzialità:

> Sbagliando la matematica vuol dire che non abbiamo capito quasi niente e sbagliando invece una parola di inglese, è solo un piccolo sbaglio. [Giacomo, 2.SI[1]]

> Quando ho cominciato ha fare questa materia non credevo che fosse così piena di insidie perché al minimo errore si sbaglia. [Elena, 5.P]

La paura di sbagliare nasce già nella scuola primaria come paura associata alla valutazione, e può diventare nel tempo paura di non capire, di imparare, …addirittura paura di aver paura:

> In 1a elementare avevo paura della matematica perché avevo paura di sbagliare. Già all'inizio della terza cominciò a non piacermi più. A me le operazioni in colonna non riescono tanto bene. Infatti quando c'è matematica vorrei tornare a casa. [Giada, 4.P]

> Quando vengo interrogata, o viene annunciato un compito in classe entro in uno stato d'ansia, le mani iniziano a tremare e vengo avvolta dalla paura di sbagliare.[Erika, 2.SI]

> Quando si fa qualcosa di nuovo ho sempre paura che sia difficile. [Alessio, 5.P]

> Mi ricordo una volta in terza, che abbiamo incominciato a imparare le divisioni, avevo una specie di paura di imparare, paura di andare avanti con il programma … [Martina, 5.P]

[1] Questo e altri stralci che citerò sono tratti da temi autobiografici dal titolo "Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi" raccolti all'interno di una ricerca sull'atteggiamento nei confronti della matematica degli allievi italiani (V. Di Martino e Zan, 2005): la sigla indica la classe ed il livello scolare (Primaria, Secondaria Inferiore, Secondaria Superiore). Tutti gli stralci sono riportati nella forma originale.

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI PON 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

> Quando eseguo dei test di matematica spesso anzi molto spesso ho paura ed è questo che mi crea dei problemi ad eseguirlo, perché ho paura che la paura mi faccia sbagliare molte cose, mi blocca nell'eseguirlo. [Francesco, 5.P]

È una paura che spesso arriva ad inquinare il rapporto con la matematica, portando l'allievo ad un rifiuto generalizzato della disciplina, cui vengono associate altre emozioni forti e negative, come la rabbia, la frustrazione, la vergogna: è un ulteriore elemento che allontana la matematica dall'esperienza della vita reale, dove invece errare è considerato *umano*.

Ma questa paura di fare errori, e quindi la connotazione negativa dell'errore, non è innata nell'allievo: si forma attraverso la sua interpretazione dell'esperienza scolastica, in cui hanno un ruolo cruciale i comportamenti dell'insegnante, i suoi messaggi impliciti e espliciti. In altre parole la paura degli errori è prima di tutto una paura *dell'insegnante*, associata ad una visione della matematica come disciplina fatta di risposte corrette, disciplina della certezza e del rigore, aspetti che l'insegnante stesso spesso percepisce come inconciliabili con l'errore.
Questa connotazione dell'errore in matematica non solo è molto pericolosa, per gli effetti che ha sugli allievi e sul rapporto che essi costruiscono con la disciplina: è anche 'scorretta' dal punto di vista epistemologico. Nella sua attività il matematico infatti si pone ed affronta problemi, e quindi esplora, congettura, sbaglia, torna indietro, cambia strada…non procede in modo lineare e pulito.
Il ruolo dell'errore nella scienza del resto è sottolineato da molti studiosi. Il filosofo Karl Popper, senz'altro uno dei più autorevoli rappresentanti della cosiddetta epistemologia dell'errore, scrive:

> [...] evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi [Popper, 1972, tr. it. p. 242].

Le riflessioni di Popper trovano eco anche nel campo dell'educazione, in particolare dell'educazione matematica: se l'insegnamento della matematica deve offrire agli allievi occasioni di riflettere, di esplorare, di assumersi la responsabilità di congetturare, di argomentare, in poche parole occasioni di affrontare problemi e non solo esercizi standard, un apprendimento significativo della matematica è necessariamente lastricato di errori. È su questi errori che l'allievo gradatamente costruirà conoscenze, abilità, competenze.

Più in generale quando si affronta un problema di qualsiasi genere – e non una situazione standard - l'errore va messo nel conto. Ma in contesto scolastico questo fatto, anziché spingere l'insegnante ad una maggiore tolleranza verso l'errore, a volte lo spinge piuttosto a proporre esercizi ripetitivi invece che problemi, a evitare domande 'troppo difficili': in altre parole a evitare errori.

A proposito di tale pratica scriveva già nel 1975 la studiosa Zofia Krygowska:

> Questa accortezza didattica [*n.d.r.: il blocco delle occasioni di errore*] consiste nella scelta, da parte del professore abile, delle difficoltà che l'allievo incontrerà sulle vie del ragionamento in modo che l' occasione di commettere errori sia minima. Certi manuali e certe raccolte ci offrono esempi al riguardo. Gli esercizi sono raggruppati sistematicamente, dopo che alcuni sono presentati come esempio, le istruzioni sono talmente suggestive che è difficile, anche a un alunno che capisca poco, di commettere un errore. Un simile blocco degli errori non dà risultati positivi che apparentemente. Quello che è oscuro nel cervello dell'alunno rimane oscuro benché il segnale «errore» non si accenda. Questo modo di procedere dà delle illusioni ai professori e agli alunni (…), l'abolizione delle difficoltà non essendo equivalente alla vittoria riportata sopra di esse [Krygowska, 1957, p. 176].

Lo psicologo Howard Gardner (1991) parla a questo proposito del 'compromesso delle risposte corrette': un patto fra insegnanti e studenti, in cui entrambi fingono che la risposta corretta dimostri che il processo di insegnamento / apprendimento ha avuto successo. L'assenza di errori comunque non garantisce assenza di difficoltà: una risposta corretta può essere il frutto di processi di pensiero scorretti o parziali, e non di un'effettiva comprensione.
Il 'compromesso delle risposte corrette' fa perdere importanti occasioni all'allievo e all'insegnante. Se infatti l'errore è un momento inevitabile dell'apprendimento, esso può costituire per l'insegnante un segnale importante dello stato di tale processo.
Come scriveva il matematico Federico Enriques:

> Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua arte didattica. Egli impara presto a distinguere gli errori significativi da quelli, che non sono propriamente errori - affermazioni gratuite di sfacciati che cercano di indovinare - dove manca lo sforzo del pensiero, della cui adeguatezza si vorrebbe giudicare.
> E degli errori propriamente detti, che talora sono in rapporto con manchevolezze delle singole menti, ma nei casi più caratteristici si presentano come tappe del pensiero nella ricerca delle verità, il maestro sa valutare il significato educativo: sono esperienze didattiche che egli persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche ad errare per

imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere [Enriques, 1936, p. 12].

Quella che Enriques chiama 'comprensione' va al di là della semplice osservazione dell'errore: è il risultato di un processo di *interpretazione*, fondamentale per pianificare un'azione didattica che non si ponga l'obiettivo riduttivo di sostituire la risposta scorretta con una risposta corretta, ma cerchi invece di promuovere la comprensione degli allievi. Come scrive ancora Howard Gardner:

> Non è possibile incominciare a valutare l'efficacia di una scuola se non dopo aver chiarito quali sono le ambizioni che si nutrono nei suoi confronti. (…) il solo criterio dell'efficacia educativa di un'istituzione è la sua *capacità di promuovere negli studenti un più alto grado di comprensione*. Se è vero che i test che prevedono brevi risposte nonché i controlli orali in classe possono dare un'idea del livello di comprensione degli studenti, è vero anche che, se si desiderano prove sicure del fatto che essi sono giunti a livello di comprensione del significato, in genere è necessario guardare più a fondo. [Gardner, 1991, tr. it. pp. 154-155]

Con le riflessioni che seguono cercheremo proprio di 'guardare più a fondo' nel processo di interpretazione dell'errore, processo cruciale e delicato, ma fondamentale per pianificare a partire dall'errore stesso un'azione didattica mirata.

2. L'interpretazione dell'errore

L'interpretazione più immediata dell'errore commesso da un allievo in un certo contesto rimanda alla mancanza di conoscenze o abilità in quel contesto. Ad esempio, se Marco ha sbagliato a calcolare l'area di una figura geometrica, l'insegnante tende a concludere che Marco non ha conoscenze sufficienti a riguardo. Un'azione didattica coerente con tale interpretazione tenderà a recuperare tali conoscenze, ad esempio riprendendo gli argomenti in questione, rispiegandoli, proponendo esercizi di rinforzo.

In realtà ogni insegnante sa bene che questo tipo di intervento non sempre è efficace. E soprattutto in genere non è efficace con gli allievi più deboli.
Se come insegnanti ci interroghiamo sul perché del fallimento di azioni didattiche di questo tipo, la tentazione è di attribuirne la responsabilità all'allievo, che non sta attento, che non si impegna, che non ha le basi, …addirittura che non ha sufficienti *capacità*. Per usare la metafora della medicina, in questo modo non mettiamo in discussione la 'cura' che abbiamo programmato, ma il paziente che l'ha seguita. In altre parole secondo noi la cura va bene, …è il paziente che non si adegua:

Scena: *Il dottor Gillupsie ha chiamato molti dei suoi chirurghi interni del Blear General Hospital. Essi stanno per cominciare la loro relazione settimanale sulle varie operazioni compiute negli ultimi quattro giorni…*
GILLUPSIE: E lei, Carstairs, come le vanno le cose?
CARSTAIRS: Temo di essere stato sfortunato, dottor Gillupsie. Niente operazioni questa settimana, ma solo tre pazienti morti.
GILLUPSIE: Bene; dovremmo parlarne un po', non le pare? Di che cosa sono morti?
CARSTAIRS: Non lo so con certezza, dottor Gillupsie, ma comunque ho dato a ciascuno di loro un bel po' di penicillina.
GILLUPSIE: Ah! Il sistema tradizionale della cura "buona di per se stessa", eh, Carstairs?
CARSTAIRS: Beh, non esattamente, capo. Pensavo solo che la penicillina li avrebbe fatti stare meglio.
GILLUPSIE: Per che cosa li stava curando?
CARSTAIRS: Insomma, stavano proprio male, capo, e io so che la penicillina fa star meglio gli ammalati.
GILLUPSIE: Certamente, Carstairs. Penso che lei abbia fatto bene.
CARSTAIRS: E i morti, capo?
GILLUPSIE: Cattivi, figlio mio, cattivi pazienti. E non c'è niente che possa fare un buon dottore quando si trova di fronte dei cattivi pazienti. E nessuna medicina può farci nulla, Carstairs.
CARSTAIRS: Eppure mi è rimasta ancora la seccante impressione che forse non avevano bisogno di penicillina, che servisse qualcos'altro.
GILLUPSIE: Sciocchezze! La penicillina non fa mai cilecca su dei buoni pazienti. Lo sanno tutti.
Al suo posto non mi preoccuperei troppo, Carstairs.
[Neil Postman e Charles Weingartner, *L'insegnamento come attività sovversiva*, tr. it. pp. 48-49]

La metafora della medicina, oltre a rendere evidente che è l'azione didattica a doversi adattare all'allievo, e non viceversa, suggerisce anche che il fallimento di tale azione può essere dovuto ad una diagnosi sbagliata, in particolare a un'interpretazione dell'errore inadeguata. A sua volta questa diagnosi sbagliata può essere dovuta ad un processo di osservazione inadeguato. Ad esempio, una singola osservazione non può giustificare l'interpretazione di un errore come frutto di 'distrazione', né permette di riconoscere l'eventuale carattere di sistematicità dell'errore stesso.
In definitiva può essere che la diagnosi sia sbagliata, vuoi perché i 'sintomi' sono state male interpretati, vuoi perché non erano sufficienti per azzardare una diagnosi.
L'insegnante ha un ruolo centrale in questi processi di osservazione e di interpretazione (la diagnosi). D'altra parte una diagnosi, seppure iniziale e aperta a eventuali modifiche, è indispensabile per progettare un intervento: l'importante è che l'insegnante sia consapevole del carattere 'provvisorio' di

tale diagnosi, che funziona per lui come ipotesi di lavoro. Solo con questa consapevolezza, in caso di fallimento della sua azione didattica potrà tornare indietro eventualmente mettendo in discussione l'interpretazione originaria, o compiendo ulteriori osservazioni dell'allievo.

Per far questo è anche importante che l'insegnante abbia un 'repertorio' di interpretazioni alternative, rispetto a quelle – più immediate e locali – che attribuiscono l'errore dell'allievo a sue carenze a livello di conoscenze.

Vediamo allora alcuni esempi di interpretazioni alternative, che possono arricchire le competenze dell'insegnante nell'osservare e nell'interpretare i comportamenti degli allievi, e anche fornirgli nuovi strumenti per intervenire.
Tali interpretazioni nel loro insieme evidenziano la complessità del processo di apprendimento (e quindi di insegnamento), per la varietà dei fattori implicati: cognitivi, ma anche metacognitivi e affettivi.

3. Abilità metacognitive

La ricerca sulla risoluzione di problemi (di qualsiasi tipo) ha messo in luce che il bravo solutore di problemi è caratterizzato da un'abilità di carattere trasversale rispetto alle conoscenze necessarie per risolvere un problema specifico: l'abilità nel gestire tali conoscenze. Questa abilità, detta metacognitiva, si articola in due momenti distinti anche se correlati:
- la consapevolezza delle proprie risorse
- l'attivazione di strategie per ottimizzare tali risorse (i cosiddetti processi di controllo).

A parità di risorse il fatto di esserne consapevoli e la conoscenza di strategie adeguate a tali risorse permette di migliorare notevolmente la prestazione. Vediamo un esempio. Supponiamo che a due persone, A e B, vengano elencati 10 oggetti da acquistare al supermercato. Supponiamo inoltre che A sia in grado di ricordare solo 5 nomi su 10, mentre B sia in grado di ricordarne 9. Se A, a differenza di B, regola i propri comportamenti in base alle proprie risorse, e se conosce delle strategie efficaci, la prestazione di A potrà risultare migliore di quella di B nonostante che le risorse di partenza di B siano superiori. Ad esempio se A scrive la lista di oggetti da comperare, mentre B non attiva alcuna strategia, A tornerà con 10 oggetti, B con 9. Potremmo dire che A ha *regolato* il proprio comportamento in relazione ai suoi limiti di memoria. E fin qui siamo nell'ambito dei processi di controllo. È chiaro però che il comportamento di A deriva dal fatto che egli è consapevole dei propri limiti:

addirittura possiamo immaginare che B non metta in atto processi di controllo perché magari è convinto di poter ricordare tutti e 10 gli oggetti.

Questa differenza a livello di prestazione non è dovuta evidentemente alle risorse disponibili, ma alla *gestione* di tali risorse: in questo aspetto di gestione i processi di controllo che entrano in gioco sono fortemente influenzati dalle convinzioni che il soggetto ha riguardo alle risorse effettivamente disponibili.

In contesto scolastico sono numerosi gli esempi di come una cattiva gestione delle proprie risorse possa essere motivo di insuccesso: una cattiva gestione del tempo a disposizione può essere causa di fallimento nell'affrontare una prova con tempo limitato, così come possono essere motivo di fallimento la mancata consapevolezza di propri punti deboli (quali la scarsa precisione nei calcoli, o l'abitudine a leggere il testo di un problema in modo superficiale).

4. L'apprendimento come attività costruttiva

Nella parte che segue prenderemo in considerazione alcune interpretazioni dell'errore che sono accomunate da uno stesso modello di apprendimento: quello cosiddetto *costruttivista*, che riconosce all'allievo un ruolo centrale nella costruzione della conoscenza. Secondo questo modello davanti alla 'realtà' l'individuo fin dai primi anni di vita è soggetto attivo che costruisce interpretazioni dell'esperienza, nel tentativo di *dare senso* al mondo e di anticipare così le esperienze future. Come conseguenza di questo continuo processo di interpretazione della realtà già all'età di cinque o sei anni i bambini hanno sviluppato delle vere e proprie *teorie* riguardo i tre ambiti che costituiscono il reale: quello degli oggetti fisici, quello degli organismi viventi, quello degli esseri umani (Gardner, 1991).
Il modello costruttivista supera modelli precedenti, quali il cosiddetto modello 'del travaso', secondo il quale la conoscenza può essere semplicemente trasferita da un soggetto (l'insegnante) ad un altro (l'allievo). Questo modello fra l'altro sottovalutava il ruolo cruciale della comunicazione in questo processo di 'trasferimento': c'era una fiducia ingenua nel linguaggio e nella sua efficacia, in particolare nel campo dell'insegnamento della matematica, la disciplina che sembra vantare più di ogni altra un linguaggio specifico, *rigoroso* e *non ambiguo*. Secondo il modello costruttivista, il bambino che si presenta a scuola, lungi dall'essere un contenitore vuoto da riempire con le conoscenze ritenute opportune, è un soggetto attivo che ha già costruito conoscenze e teorie, molte delle quali ingenue. Si potrebbe pensare che l'insegnamento esplicito impartito a scuola abbia come effetto la rimozione di tali teorie ingenue in favore delle teorie più mature e istituzionalizzate che caratterizzano le discipline oggetto di insegnamento. In realtà la ricerca dimostra che non è così. Nello stesso individuo – e non necessariamente bambino! – possono convivere teorie ingenue e teorie mature, anche se in contraddizione fra loro. Le ricerche riguardano per lo più le discipline che tentano di spiegare il mondo, quindi soprattutto il campo delle scienze sperimentali, della probabilità, dei processi decisionali, e mettono in evidenza che le intuizioni ingenue che un individuo sviluppa riguardo ad alcuni aspetti della realtà possono coesistere con la

conoscenza formale acquisita in merito, anche se tale conoscenza è in contraddizione con esse.
In realtà per la matematica il discorso è un po' diverso: per lo più è a scuola che il bambino incontra questa disciplina, ed è quindi a scuola che costruisce le prime interpretazioni a riguardo. In ogni caso, questo processo di interpretazione continuo fa sì che parallelamente al curriculum 'trasparente' dell'insegnante (le frazioni, l'area e il perimetro, …) l'allievo, *ogni* allievo, costruisca un suo curriculum nascosto fatto delle sue interpretazioni degli insegnamenti: quindi la *sua* idea di frazioni, la *sua* idea di perimetro e area, ecc.

5. I misconcetti

Quando queste interpretazioni sono diverse da quelle istituzionalizzate e accettate come corrette, si parla di misconcetti (o misconcezioni, concezioni errate, concezioni alternative …).
Alcuni misconcetti sono molto diffusi. Ad esempio gli allievi (non solo di scuola media!) spesso usano le parentesi in modo non appropriato. Da un lato mettono parentesi anche quando non servono:
$(7+2^5)+3^2$
dall'altro, cosa ben più grave, non le mettono quando invece servono.
Così la formula che esprime l'area di un trapezio:
(1) $\dfrac{(b+B)\cdot h}{2}$
viene a volte scritta così:
(2) $\dfrac{b+B\cdot h}{2}$
In realtà poi lo stesso allievo che ha scritto la formula (2) la legge come se fosse la formula (1). Ad esempio Giacomo dovendo trovare l'area di un trapezio sapendo che $b=7cm$, $B=10cm$, $h=4cm$ scrive:
$\dfrac{7+10\cdot 4}{2}cm^2$
ma calcola come se fosse $\dfrac{(7+10)\cdot 4}{2}$, ottenendo il risultato corretto 34*cm*^{2}.
Una possibile interpretazione di questo comportamento è che Giacomo usi le parentesi come una stenografia personale, da utilizzare in passaggi provvisori che verranno cancellati o comunque perderanno di senso quando avrà ottenuto quello che a suo parere davvero conta, cioè il risultato. La finalità di questi segni è allora di rimarcare *a lui stesso* un ordine: è chiaro che in tale ottica le

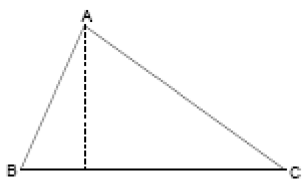
parentesi sono inutili se in effetti poi lui esegue l'ordine delle operazioni nel modo richiesto!
Ma quello che qui più mi interessa sottolineare, è che se Giacomo ha costruito una concezione dell'uso delle parentesi come una stenografia personale, in

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI PON 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

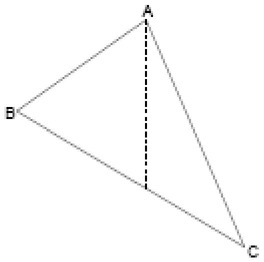
presenza di un risultato corretto sarà impossibile convincerlo che ha fatto o scritto qualcosa di sbagliato: la (naturale) correzione dell'insegnante assumerà solo il sapore di un'inutile e ingiusta pignoleria.

Questa interpretazione, pur riconoscendo il comportamento dell'allievo come razionale e coerente, non implica una rinuncia all'intervento: piuttosto suggerisce modalità di intervento mirate. Dato che la codificazione dell'uso delle parentesi è semplicemente una *convenzione* per rendere possibile e più facile la comunicazione, è indispensabile che l'allievo colga questo scopo. Per recuperare la funzione di comunicazione che le parentesi hanno, è necessario non limitare tale comunicazione alla relazione allievo-insegnante (l'allievo è convinto che l'insegnante sia in grado di capire quello che lui vuole dire: se l'insegnante non lo fa, è per cattiva volontà), ma inserirla in un'attività fra pari. Ad esempio si può pensare ad un lavoro a gruppi, in cui un gruppo scrive un'espressione, ed un altro la calcola: è chiaro che un'interpretazione diversa delle parentesi può portare a risultati diversi, quindi ad un conflitto, ed alla consapevolezza che per superare tale conflitto è necessario sciogliere l'ambiguità della scrittura accordandosi sulle regole di precedenza delle operazioni.

Altri esempi di misconcetti molto diffusi sono quelli relativi alle altezze di un triangolo.
Per molti studenti un'altezza ha la caratteristica di essere verticale, e non piuttosto quella di essere perpendicolare al lato su cui cade.
Quindi se il triangolo è disegnato (come in genere è disegnato) con un lato orizzontale, l'errore non ha occasione di verificarsi:



…ma basta girare il triangolo perché il ragazzino disegni l'altezza così:



Tra l'altro questo misconcetto porta a pensare che di altezze in un triangolo ce ne possa essere solo una, o comunque una per volta (a seconda del lato che assume la posizione orizzontale).

Nell'esempio delle altezze è facile riconoscere la responsabilità dell'insegnamento nella formazione di un misconcetto: se l'allievo alla lavagna ha visto sempre disegnare l'altezza verticale (perché il triangolo è disegnato con un lato orizzontale, e l'unica altezza individuata è quella relativa a tale lato) avrà difficoltà a distinguere nel concetto di altezza la proprietà intrinseca di essere perpendicolare al lato opposto, da quella accidentale di essere verticale.

6. Linguaggio quotidiano e linguaggio matematico

Secondo il modello costruttivista anche l'attribuzione di significato ad un messaggio è frutto di un processo di interpretazione: questo processo di interpretazione non si riduce ad una semplice decodifica linguistica, ma si appoggia in modo essenziale sulle informazioni che si possono ricavare dal contesto.
Ad esempio se Tizio dice a Caio: "Sei proprio una brava persona!", attribuiremo un senso diverso al messaggio a seconda del tono con cui viene detta questa frase, ma anche di altri aspetti del contesto. Se Tizio ha appena scoperto che Caio l'ha truffato, il senso della frase sarà completamente diverso dal suo significato letterale.
La nostra sopravvivenza nel mondo sociale è basata sulla nostra capacità di dare senso al linguaggio, di interpretare i contesti, in definitiva di comunicare. Lo studio del linguaggio nei suoi contesti d'uso caratterizza la *pragmatica*, un approccio della linguistica che pone al centro dei suoi interessi la comunicazione. Per poter comunicare le persone devono *cooperare*, cercando di essere chiare, pertinenti, adeguando l'informazione agli scopi del discorso.

Su questo *principio di cooperazione* si basa la nozione di *implicatura conversazionale*[2]: è un tipo di inferenza che l'ascoltatore fa quando interpreta il messaggio *assumendo* il principio di cooperazione.
Un classico esempio è il seguente:
A. Dov'è Carlo?
B. C'è una Volkswagen gialla davanti a casa di Anna.
Apparentemente la risposta di B non è pertinente, e violerebbe quindi le regole di cooperazione. Ma in realtà chi ascolta cerca di interpretare l'enunciato di B come risposta cooperativa, ed è portato quindi a fare una serie di inferenze: che B sappia che Carlo ha una Volkswagen gialla, e che ci voglia dire che probabilmente Carlo è a casa di Anna.

L'uso competente del linguaggio quotidiano presuppone questo tipo di inferenze, che invece nel contesto della matematica non sono considerate legittime.

Questa è una delle diversità fra i due tipi di linguaggio che costituisce un elemento di difficoltà notevole, dato che nell'insegnamento non è possibile 'isolare' il linguaggio matematico dal linguaggio quotidiano. Quando entriamo in classe e cominciamo a spiegare, continuamente scivoliamo dal linguaggio quotidiano a quello matematico e viceversa, e non sempre questo scivolamento è evidente (come lo è quando è marcato dall'uso del simbolismo). Fra le conseguenze di questa commistione fra linguaggio quotidiano e linguaggio matematico sono particolarmente significative quelle che riguardano l'uso dell'implicazione e dei quantificatori, e la loro negazione.

In un esempio proposto da Ferrari (2003), Annalisa - prima liceo scientifico - deve riconoscere l'equivalenza fra alcune frasi.
La prima frase è:
a) Non tutti gli operai della fabbrica sono italiani
e Annalisa deve riconoscere a quale/i delle seguente frasi è equivalente:
a') Tutti gli operai della fabbrica sono stranieri
b') Alcuni operai della fabbrica sono italiani
c') Tutti gli operai della fabbrica sono italiani
d') Alcuni operai della fabbrica sono stranieri.

Annalisa riconosce come equivalenti alla frase *a* le frasi *b'* e *d'*.
In realtà dal punto di vista matematico l'unica frase equivalente ad *a* è la frase *d'*. Ma dal punto di vista del linguaggio quotidiano *b'* è una *implicatura conversazionale* della frase *a*. Ciò vuol dire che *b'* si deduce da *a* se accettiamo che la frase *a* soddisfi il principio di cooperazione (cioè è adeguata al contesto

[2] Per approfondimenti sull'importanza di questa e di altre nozioni della pragmatica per l'insegnamento della matematica rimando al libro di Pier Luigi Ferrari (Ferrari, 2005).

ed agli scopi comunicativi). In effetti se non fosse vero *b′* sarebbe stato più adeguato dire '*Nessun* operaio della fabbrica è italiano'. Se sentissimo al telegiornale la notizia:"La fabbrica x del Nord sta chiudendo: più di 100 operai – non tutti italiani - perderanno il lavoro" la nostra interpretazione sarebbe la stessa di Annalisa: qualche operaio della fabbrica è italiano, altrimenti sarebbe stato più adeguato – cioè più informativo – dire "più di 100 operai –tutti stranieri - perderanno il lavoro".
Se assumiamo questo punto di vista l'errore di Annalisa non è necessariamente dovuto a carenze a livello di ragionamento logico, ma all'applicazione di schemi tipici del linguaggio quotidiano ad un contesto matematico, o meglio ad un contesto che l'insegnante ha stabilito essere matematico: in questo senso non si tratta nemmeno di errore.
Questa interpretazione della risposta di Annalisa più che essere un punto di arrivo porta a considerare ulteriori domande per costruire ipotesi di lavoro adeguate: forse Annalisa non distingue i due contesti? Oppure non sa che contesti diversi sono caratterizzati da schemi di ragionamento diverso? O ancora non è consapevole del tipo di ragionamento specifico del contesto matematico?

L'esempio di Annalisa riguardava l'uso dei quantificatori e la loro negazione. Anche l'uso scorretto dell'implicazione (logica) in matematica può essere favorito dagli schemi d'uso tipici del linguaggio quotidiano: se un ragazzo a casa si sente dire dal padre "Se sei promosso ti compro il motorino" ne deduce (correttamente) "Se sei bocciato ti puoi scordare il motorino!". Questa inversione dell'implicazione è in effetti uno degli errori più diffusi in matematica.

Un altro campo in cui a mio parere l'uso del linguaggio quotidiano si scontra con l'uso del linguaggio matematico è quello delle definizioni. In matematica sono apprezzate le definizioni essenziali. Ma alla richiesta di dare una definizione di quadrato Giada risponde:
"Un quadrato è un quadrilatero con i lati opposti paralleli, con tutti i lati uguali, gli angoli uguali e tutti retti, le diagonali uguali che si incontrano a metà e sono perpendicolari."
Probabilmente Giada si sente anche soddisfatta di essere riuscita ad elencare tutte queste proprietà, e invece l'insegnante le farà notare che quella non è una definizione *come si deve*, perché dice più cose del necessario. In fondo bastava dire:
"Un quadrato è un quadrilatero con lati e angoli uguali."
Giada ha *descritto*, più che *definito*, il quadrato, elencando quindi più caratteristiche possibile, come quando, tornando a casa, raccontiamo di aver incontrato una persona e cerchiamo di far comprendere al nostro interlocutore di quale persona si tratta: "Maria, ti ricordi? Alta, bionda, con gli occhiali, magra, ecc. ecc.".

Come abbiamo già osservato parlando di convenzioni, l'allievo non potrà comprendere perché le definizioni in matematica si vogliono essenziali se non collega tale richiesta ad uno scopo: uno scopo naturale (in matematica) è che se voglio dimostrare che una figura è un quadrato sarà molto più faticoso farlo seguendo la definizione di Giada.

Altre occasioni di 'scontro' fra linguaggio quotidiano e linguaggio matematico sono le parole o le espressioni che vengono usate nei due casi con significati diversi. Ad esempio una parola importante come 'ipotesi' viene utilizzata in modo diverso nel contesto della matematica e in quello delle scienze sperimentali o del linguaggio quotidiano.

7. La comprensione (del testo) di un problema

L'uso adeguato del linguaggio matematico richiede la consapevolezza del fatto che contesti diversi – in particolare problemi di natura diversa e quindi discipline diverse – possono richiedere linguaggi diversi. Questa consapevolezza è una competenza linguistica (anzi, metalinguistica) di importanza cruciale.
Competenze linguistiche fondamentali sono chiamate in cause anche nella comprensione di un testo, in particolare di quei particolari testi che sono i testi dei problemi di matematica.
La comprensione di un problema è legata alla fase di *rappresentazione* del problema stesso, che dovrebbe precedere la fase di *soluzione*. In effetti ricercatori e insegnanti concordano sul fatto che molte delle difficoltà osservate nell'ambito dell'attività di risoluzione di problemi provengono da un'inadeguata rappresentazione del problema piuttosto che da procedure risolutive scorrette.
Perché l'allievo si possa rappresentare un problema espresso attraverso un testo scritto (come sono i problemi scolastici standard) deve innanzitutto comprendere tale testo. Questa comprensione mette in gioco una quantità e varietà di conoscenze.
C'è innanzitutto la conoscenza del significato delle parole utilizzate, il cosiddetto *dizionario*, che può costituire un problema soprattutto per allievi che provengono da contesti deprivati dal punto di vista socioculturale, o per allievi di lingua madre diversa dalla nostra[3]. Certo l'insegnante sa bene che la soluzione di un problema può prescindere dalla conoscenza del significato di una singola parola: che sia la mamma che va al mercato a comprare le uova, o il babbo, o la signora Maria… la struttura matematica del problema rimane invariata. Ma questa consapevolezza è tipica dell'esperto, cioè di chi sa già riconoscere nel problema un certo tipo di struttura matematica: in mancanza di

[3] Ad esempio nell'ambito di una tesi di laurea che ho seguito è stata fatta una piccola indagine sulla conoscenza di alcuni termini utilizzati nelle prove OCSE-PISA ('popolarità', 'cuscinetto a sfera', …) ed è emerso che molti studenti avevano un'idea piuttosto confusa di tale significato.

tale consapevolezza, soprattutto se il problema non è standard, l'allievo può rimanere bloccato e rinunciare ad affrontare il problema o addirittura a proseguire nella lettura del testo.
Se è ovvio che la conoscenza del dizionario è importante per la comprensione del testo, forse non è altrettanto evidente l'importanza della conoscenza delle 'cose del mondo', la cosiddetta *conoscenza enciclopedica*.
Non è facile rendersi conto di quando le difficoltà degli allievi sono riconducibili ad un'inadeguata conoscenza enciclopedica.

Un esempio in cui questo appare con chiarezza è il seguente problema[4]:

Leggi attentamente il testo del seguente problema e, senza risolverlo, individua i dati mancanti o superflui: Un allevatore possiede 47 mucche e 10 cavalli. Una mucca produce in media 15 litri di latte al giorno. Quanto latte viene prodotto ogni giorno nell'allevamento? Nel problema c'è un dato: ☐ superfluo ☐ mancante Quale?…………………………………………………………

Un bambino di V elementare risponde così:

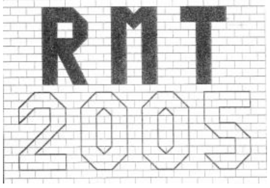
Nel problema c'è un dato: *mancante.*
Quale? *Non sappiamo quanto latte producono i cavalli ogni giorno.*

Potremmo dire che non fa parte della conoscenza del mondo di quel bambino il fatto che i cavalli non producono latte per l'allevamento, che è esattamente quella porzione di conoscenza sui cavalli necessaria per poter affrontare il problema.

I problemi espressi in forma verbale poi sono spesso densi di *impliciti*.
Fra gli impliciti forse più frequenti ci sono quelli tipici dei problemi di *modellizzazione*. Per matematizzare una situazione spesso è necessario un processo di 'semplificazione' della complessità. A volte questo processo è a carico del solutore, ma più spesso – soprattutto in contesto scolastico - è implicito nel testo. In questi casi la conoscenza cui si fa riferimento *non* è la conoscenza enciclopedica, ma una sua versione 'addomesticata': il problema è che è stata addomesticata da qualcun altro, e che questo processo rimane oscuro al bambino (e a volte anche all'insegnante).
Ad esempio questo è il testo di un problema del Rally Matematico Transalpino:

[4] L'esempio mi è stato raccontato da Stefania Pozio, che l'ha raccolto in un'attività di formazione con insegnanti di scuola primaria.

Sul muro della scuola è stata pitturata la parte interna delle lettere R, M e T, preparate per la prossima finale del Rally Matematico Transalpino. Rimane da dipingere la parte interna delle quattro cifre del 2005.



Sofia dipinge il «2» e il primo «0». Mauro dipingerà l'altro «0» e il «5».
Chi userà più pittura?
Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Rimane implicito non solo che la quantità di pittura dipende dalla superficie da tingere, ma anche che piccole variazioni di superficie porteranno a variazioni analoghe della quantità di tinta. Quest'ultima assunzione, necessaria per dare la risposta ritenuta corretta, non è affatto realistica, come ben sa chiunque si sia cimentato da dilettante nella tinteggiatura di un oggetto[5].
Nei problemi verbali la riduzione della complessità spesso è legata alla necessità di adeguare i processi risolutivi alle conoscenze dell'allievo, e può risultare quindi artificiosa: il bambino per rappresentarsi il problema dev'essere allora *realistico ma non troppo*, e soprattutto condividere le modalità (implicite) con cui la complessità viene ridotta[6].
In definitiva la rappresentazione di un problema verbale non solo richiama la conoscenza enciclopedica dell'allievo, ma richiede anche conoscenze riguardo alle 'regole del gioco', che sono cruciali per gestire (e addirittura a volte per far tacere) la conoscenza enciclopedica stessa.

Ma la complessità del processo di comprensione di un testo scritto è solo un aspetto – seppure fondamentale – della comprensione di un problema scolastico. La possibilità di rappresentarsi un problema mette in gioco infatti qualcosa di più profondo e personale[7]. Per rendercene conto usciamo dal contesto scolastico e facciamo un esempio di un problema reale. Se una nostra collega ci dice: 'Ho la bimba ammalata e domani c'è la riunione", noi riconosciamo la problematicità della situazione, prima ancora che venga formulata la domanda ("come posso fare?"). Anzi, non c'è proprio bisogno che il nostro interlocutore formuli esplicitamente una domanda: la domanda può rimanere implicita, in quanto conseguenza 'naturale' della situazione descritta.

---

[5] Questa analisi non vuole essere una critica ai problemi del Rally Matematico Transalpino (RMT), una gara di matematica fra classi che considero una fonte di problemi stimolanti preziosa per gli insegnanti.
[6] Ad esempio è possibile che sia considerata troppo realistica (o comunque senz'altro diversa da quella 'attesa') la seguente risposta di un bambino al problema delle mucche e dei cavalli: *"C'è un dato mancante: non sappiamo quanto latte esattamente fa una mucca quel giorno"*.
[7] Su questo tema affascinante suggerisco la lettura del libro di Margaret Donaldson *Come ragionano i bambini* (1978).

La possibilità di riconoscere la situazione come problematica, e quindi di immaginare la domanda che ne consegue ("come si può fare?") discende dal fatto che la situazione evocata richiama la nostra conoscenza delle cose del mondo, rievoca *storie* che abbiamo vissuto o che abbiamo sentito narrare. Lo stesso messaggio enunciato in altri contesti (ad esempio a bambini piccoli, o a persone che hanno avuto esperienza solo di famiglie patriarcali) non verrebbe riconosciuto come problematico.
La comprensione del problema mette in gioco quindi un tipo di pensiero particolare: quello che Bruner (1986, 1990) chiama *narrativo*, distinguendolo dal pensiero di tipo *logico*. Il pensiero logico si occupa di categorizzare la realtà, di ricercare cause di ordine generale, applicando argomentazioni dimostrative. Ma appare inadeguato a mettere in relazione azioni e intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti, a coglierne il significato. L'interpretazione dei fatti umani è invece resa praticabile dal *pensiero narrativo*, che caratterizza una differente modalità di approccio al mondo, e che produce racconti plausibili e ragionevoli.
Il pensiero narrativo quindi ha un ruolo importante nella comprensione di un problema, e di conseguenza nel sostenere il pensiero logico necessario per la soluzione.
Ma torniamo ai problemi scolastici. Il testo di un problema scolastico standard ha una struttura molto particolare: c'è un *contesto*, che descrive una situazione che si assume familiare per l'allievo, e poi c'è una *domanda* esplicita. A differenza di quello che succedeva nell'esempio della bambina malata, in genere il contesto non descrive una situazione che riconosciamo come problematica, e quindi non ci suggerisce una domanda 'naturale'. Infatti la domanda proposta è del tutto artificiosa. In altre parole nei problemi scolastici in genere contesto e domanda sono rigidamente separati: il contesto non rappresenta una situazione problematica, e la domanda finale è una domanda *sul* contesto; l'unico legame fra contesto e domanda si riduce al fatto che per rispondere alla domanda è necessario utilizzare i dati presenti nel contesto.
In questi casi, se la lettura del contesto attiva in chi legge il pensiero narrativo (il che capita soprattutto se il contesto è ricco di dettagli, o anche se l'allievo ha un approccio alla realtà di tipo narrativo) può succedere che il pensiero narrativo sia di ostacolo alla soluzione, in altre parole che invece di sostenere il pensiero logico, ne impedisca o ne limiti l'attivazione.
Vediamo un esempio di un problema dato a campioni di livello scolare variabile, dalla II media alla V liceo, tratto da Ferrari (2003):

> In una casa è stato rotto un vaso cinese. In quel momento si trovano in casa in 4 ragazzi: Angelo, Bruna, Chiara e Daniele. Al ritorno, la padrona di casa vuol sapere chi ha rotto il vaso e interroga i 4, uno alla volta. Ecco le dichiarazioni di ciascuno:
> Angelo: *"Non è stata Bruna"*
> Bruna: *"È stato un ragazzo"*

Chiara: "*Non è stato Daniele*"
Daniele: *"Non sono stato io"*
Sai scoprire chi è il colpevole? Attenzione, però: delle 4 testimonianze, 3 corrispondono alla verità mentre 1 è falsa.
Chi ha rotto il vaso cinese? Spiega come hai fatto a trovare la risposta.

Fra le risposte riportate da Ferrari sono particolarmente interessanti le seguenti:
- chi risponde *"Angelo"* motiva con argomenti come *"Angelo non è discolpato da nessuno"*
- qualcuno che risponde *"Chiara"* usa argomenti basati sull'esperienza (*"Chiara non è nominata da nessuno perché vogliono coprirla"*), così come qualcuno che risponde *"Daniele"* (*"Si discolpa, quindi probabilmente è stato lui"*).

Le argomentazioni degli allievi che sbagliano sono quindi di tipo narrativo, e ostacolano in questo caso l'attivazione del pensiero logico necessario per dare la risposta corretta: nella motivazione "Angelo è colpevole *perché* non è discolpato da nessuno", il *perché* esprime una causalità che ha a che fare con l'interpretazione dei fatti umani, dei rapporti fra le persone. Probabilmente il fatto che la storia faccia riferimento ad un copione 'narrativo' tipico (c'è un danno, il danneggiato vuole trovare il colpevole fra più persone, queste persone hanno fra loro dei rapporti) favorisce nell'allievo un'interpretazione di tipo narrativo. In tale tipo di interpretazione la domanda naturale è *"a chi credere?"*, ignorando il vincolo artificioso e poco naturale che *"solo uno dice la verità"* (chi lo può sapere?), e cercando di trovare degli indizi nelle parole dei quattro soggetti.

Il problema analizzato non è certamente un problema standard. Ma anche in problemi più standard può capitare che le competenze di tipo narrativo siano messe in gioco in un modo che risulta d'ostacolo per la produzione di una risposta corretta.
È il caso del seguente problema:

Tizio impiega 20 minuti per andare da casa al lavoro viaggiando a 40 km/h.
Oggi è in ritardo e va a 50 km/h.
Quanto tempo impiegherà?

Pare che molti studenti si trovino in difficoltà di fronte a questo problema, motivando tale difficoltà con il fatto che mancano i dati necessari per rispondere. In realtà il problema contiene dati sufficienti per rispondere alla domanda.
Il fatto è però che la domanda "Quanto tempo impiegherà?" non ha niente a che fare con la storia raccontata. Tizio è in ritardo stamattina, ci mettiamo nei suoi panni: è naturale che vada più veloce per recuperare il ritardo… La domanda naturale dal punto di vista della storia narrata, quella cioè che conclude la storia, è: "Ce la farà Tizio ad arrivare puntuale? A recuperare il

ritardo?". E per rispondere a questa domanda effettivamente sono necessari altri dati: non solo quanto tempo impiega, ma anche quanto ritardo aveva. Ecco che la formulazione del testo ammicca ad un impianto narrativo – probabilmente nella convinzione di facilitare la comprensione del problema – che poi tradisce con la domanda finale. Le conoscenze dell'allievo evocate dal contesto (ad esempio il fatto che per recuperare il ritardo è necessario aumentare la velocità) lo spingono coerentemente a cercare una risposta per quel contesto: ma per *quella* risposta - che non è la risposta alla domanda fatta - non ci sono sufficienti informazioni.

Come abbiamo detto la comprensione di un problema dovrebbe essere la prima fase del processo complessivo di risoluzione.
A volte però i comportamenti messi in atto dagli allievi di fronte ai problemi verbali sembrano testimoniare una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo. Alcuni approcci alternativi frequentemente praticati degli allievi sono: cercare di indovinare l'operazione; guardare i numeri, e da quelli risalire all'operazione 'giusta'; provare tutte le operazioni e scegliere quella che dà la risposta più 'ragionevole'; cercare 'parole chiave' ('tutti insieme' vuol dire che bisogna sommare, 'rimaste' c'è da sottrarre, …); decidere se la risposta dev'essere maggiore o minore dei numeri dati: se dev'essere maggiore, provare l'addizione e la moltiplicazione e poi scegliere la risposta più ragionevole, se dev'essere minore, provare con la sottrazione e la divisione.
Come insegnanti sappiamo bene che queste strategie non sono necessariamente tipiche dei cattivi solutori: spesso funzionano, complici la struttura stereotipata dei problemi scolastici e le norme più o meno implicite che governano l'attività di soluzione di problemi.
Della struttura stereotipata dei problemi scolastici abbiamo già detto (anche se è un tema che meriterebbe uno spazio ben più ampio). Nel paragrafo che segue accenniamo al discorso delle norme, limitandoci a qualche considerazione di carattere generale.

8. Il contratto didattico

Come abbiamo visto secondo il modello costruttivista ogni individuo è interprete dell'esperienza. In contesto scolastico l'allievo interpreta i messaggi espliciti dell'insegnante (e questo può produrre misconcetti), ma più in generale ne interpreta i comportamenti. In particolare interpreta le interazioni dell'insegnante con ogni allievo, i messaggi di conferma che l'insegnante manda (*"Bravo! Hai già finito?!"*) o viceversa i messaggi che sottintendono giudizi negativi (*"Consegni già il compito? Torna a posto e controllalo!"*). L'allievo si costruisce quindi delle convinzioni su ciò che è legittimo / auspicabile / vietato in classe durante le varie attività matematiche, e spesso

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

conforma il proprio comportamento in base a quelle che ritiene essere le aspettative e le richieste dell'insegnante.
D'altra parte, dato che è l'insegnante a riconoscere il successo / fallimento degli allievi, le richieste dell'insegnante, anche se percepite come 'pretese' o come poco ragionevoli, vanno prese sul serio, se si vuole andar bene in matematica!
Questa dinamica fra attese dell'insegnante e convinzioni degli studenti su tali attese è un fenomeno ben noto e studiato in educazione matematica, ed è chiamato in modi diversi a seconda degli approcci scelti: 'contratto didattico', 'norme socio-matematiche', 'convinzioni sulle richieste dell'insegnante',….
Forse l'esempio più convincente di tale fenomeno è quello del cosiddetto *problema dell'età del capitano*, che in Francia ha dato vita ad un filone di ricerca molto ricco sul ruolo che hanno le dinamiche allievi-insegnante nel contesto scolastico:
"Su una nave ci sono 26 montoni e 10 capre; quanti anni ha il capitano?"
La maggior parte dei bambini risponde, combinando i numeri presenti nel testo, in genere attraverso un'addizione[8] (l'operazione che produce il risultato più plausibile):
26 + 10 = 36

Le convinzioni sulle aspettative dell'insegnante sono particolarmente importanti se l'allievo identifica il successo in matematica con il rendimento, piuttosto che con la percezione di capire: in tal caso infatti è fondamentale mettere in atto quei comportamenti che l'insegnante premia, e evitare invece quelli che l'insegnante censura. Naturalmente l'allievo ha costruito una *sua* interpretazione delle aspettative dell'insegnante, ed è a tale interpretazione – e non ad una realtà 'oggettiva' - che fa riferimento.
Un esempio a mio parere molto espressivo di questo fenomeno è costituito dal comportamento di Scenetra, una bambina di seconda elementare, che viene chiamata dalla maestra a risolvere un problema (Cobb, 1985, citato in Zan, 2007). La maestra vuole riconoscere se la bambina è in grado di mettere in relazione fatti aritmetici, in particolare se sa utilizzare una somma nota per trovare una somma incognita. Alcuni suoi compagni nell'eseguire addizioni hanno dimostrato di utilizzare tale strategia addirittura in modo spontaneo.
L'insegnante scrive quindi, una sotto l'altra, le due espressioni:
34 + 9 = 43
34 + 11 =
Alla richiesta di trovare il risultato dell'ultima espressione, Scenetra riscrive in colonna i due numeri, esegue l'addizione nel modo usuale, e alla fine risponde "45".

[8] Alcuni bambini motivano tale procedimento con argomentazioni del tipo: *"Forse il capitano ad ogni compleanno ha ricevuto in regalo un animale"*, in altre parole costruiscono una *storia* che restituisce un senso narrativo ad una domanda che non ha senso logico.

L'insegnante allora le chiede: "Ma non potevi usare il risultato dell'addizione che è scritta sopra?" Scenetra risponde di no. La stessa scena si ripete tutte le volte che l'insegnante le propone compiti simili, invitandola esplicitamente a mettere in relazione somme note e incognite.
Questo comportamento di Scenetra spinge a ipotizzare una sua scarsa flessibilità nelle conoscenze e nelle regole apprese, in definitiva una scarsa padronanza del concetto di addizione.

Pochi se la sentirebbero di criticare l'insegnante, se dopo tanti tentativi falliti rinunciasse ad insistere, e annotasse:
"Scenetra padroneggia l'algoritmo dell'addizione, ma *non è in grado* di mettere in relazione due espressioni".
Ma ritorniamo alla scena descritta da Cobb.
All'insegnante di Scenetra e all'assistente presente alla sessione, Marva, viene in mente che una causa del blocco della bambina possa essere il fatto che Scenetra ritiene poco corretto ottenere il risultato utilizzando una 'scorciatoia' piuttosto che l'algoritmo imparato a scuola.
L'insegnante si rivolge allora alla bambina chiedendole:
"Secondo te, come farebbe Marva?"
Dopo un attimo di esitazione, Scenetra risponde, collegando senza difficoltà somme note e incognite. Per assicurarsi che la bambina utilizzi effettivamente la relazione fra le espressioni e non esegua invece mentalmente la somma, l'insegnante scrive una prima espressione scorretta:
34 + 14 = 49
e, sotto, aggiunge l'espressione:
32 + 15 =
Chiede quindi: "Come farebbe Marva?"

Scenetra:"...48"
Insegnante: "Quanto hai aggiunto e tolto? Come ha fatto Marva?"
Scenetra: "*Lei* ha tolto 2 e poi aggiunto 1".

Il comportamento di Scenetra dimostra che le strategie spontaneamente utilizzate dalla bambina all'inizio della sessione non erano dovute a mancanza di competenze. Un'interpretazione possibile è che Scenetra abbia la *convinzione* che forme abbreviate di soluzione non hanno la stessa legittimità dell'algoritmo standard, almeno in contesto scolastico.
Il comportamento della bambina, in particolare i processi risolutivi messi in atto, appaiono guidati da tale convinzione (frutto del suo continuo processo d'interpretazione dell'esperienza), che inibisce a priori le possibilità di utilizzare conoscenze e abilità seppure disponibili: il 'fallimento' di Scenetra nel mettere in relazione fatti aritmetici *non* è dovuto alla mancanza di risorse disponibili, ma al fatto che la bambina non fa ricorso a tali risorse.

Nell'interpretare la propria esperienza con la matematica l'allievo costruisce una molteplicità di convinzioni: perché lui va male in matematica e il suo compagno invece va bene, cosa bisogna fare per riuscire in matematica, e tante altre ancora.
Queste convinzioni influenzano profondamente il suo approccio alla disciplina, e sono alla base di quello che nel linguaggio comune si chiama 'atteggiamento verso la matematica'.

9. L'atteggiamento verso la matematica

L'atteggiamento (negativo) di un allievo verso la matematica è spesso chiamato in causa dagli insegnanti di fronte a situazioni in cui l'azione didattica sembra non avere alcun effetto: ad esempio totale rifiuto della disciplina e delle attività che essa comporta, ma anche (apparente) rifiuto a mettersi in gioco, a pensare, rinunciando quindi a rispondere, o rispondendo a caso.
Il problema non è un problema da poco: sia perché è piuttosto diffuso, sia perché in questi casi è difficile immaginare un intervento mirato. Quello che sembra chiaro è che un'azione che prende spunto dalla correzione dell'errore in questi casi mostra tutti i suoi limiti. Che senso ha partire dalla risposta scorretta per modificarla, se l'allievo è il primo a non credere alla risposta che ha dato?
L'obiettivo stesso dell'azione di recupero è più complesso e ambizioso: non si tratta di modificare un singolo comportamento (*quella* particolare risposta), ma un atteggiamento generalizzato che sta alla base di molti comportamenti.
Per individuare possibili direzioni di intervento è essenziale allora cercare di capire quali possono essere le cause di questo atteggiamento.
La rinuncia a pensare, che può portare l'allievo a rispondere a caso ma anche a rinunciare a rispondere, spesso è legata ad una percezione della matematica come disciplina incontrollabile.
A sua volta questa percezione può avere radici in una visione della matematica come un insieme di formule da applicare in esercizi ripetitivi, e quindi da memorizzare, 'spezzettata' in tanti prodotti diversi da ricordare:

> Alle medie la matematica iniziò a essere un po' più confusa specialmente per la geometria che con tutte le formule del perimetro, Area, circonferenza, diametro, ecc., imparate a memoria rendevano solo la vita più complicata. Forse ci sono troppi teoremi e troppe cose per dei ragazzi delle medie che secondo me impararle a memoria è impossibile difatti ogni volta che c'era un compito in classe tutti avevano scritto o sul banco o sulla mano le formuline del trapezio-parallelepipedo. [Luca, 3.SS]

> La matematica è molto impegnativa, infatti è tutto con i calcoli es. frazioni, problemi, espressioni normali e a due piani e ancora tanti esercizi. Il mio rapporto

> con la matematica è molto peggiorato perché bisogna ricordarci le regole e come si svolgono gli esercizi. [Silvia, 3.SI]

Tale visione della disciplina è definita da Skemp (1976, citato in Zan, 2007) *strumentale*, ed è contrapposta ad una visione *relazionale*, secondo la quale la matematica è caratterizzata da relazioni ed anche l'applicazione di formule prevede la comprensione del *perché* tali regole funzionano:

> Imparare le cose a memoria (a parte qualche formula) non mi é mai piaciuto e questa materia, insieme alla Fisica, mi offrono motivo di ragionamento e di
>
> discussione. Essa mi piace perché è una materia dove bisogna ragionare, e se non lo fai diventa difficile e molto faticosa, per non dire impossibile. […] Questa é una materia dove bisogna prima capire il problema, cosa chiede e dove vuole arrivare. [Danilo, 3.SS]

Alle due diverse visioni della matematica corrispondono due modi diversi di interpretare la parola 'capire':

> Ora sono in seconda e con la professoressa ho frequentato il corso di recupero e ho partecipato alle lezioni ed un po' ho capito però dopo mi dimentico il meccanismo. [Davide, 2.SS]

> Fino alle medie la matematica mi è sempre riuscita, perché ho sempre capito i ragionamenti, perché anche alle medie si faceva più teoria ed i tempi per capire un argomento erano più lunghi di quanto non siano stati quelli di questo anno scolastico. Seguendo di più il libro di teoria io mi trovavo meglio a studiare anche per i compiti. [Paola, 1.SS]

Il 'capire' del primo tema fa riferimento ad un meccanismo da ricordare, a regole da memorizzare e da applicare, potremmo dire ad obiettivi di immediata spendibilità, a tempi brevi ("*dopo mi dimentico*"). Nel secondo tema la stessa parola 'capire' è associata alle parole *ragionamenti*, *teoria*, richiama esplicitamente *tempi lunghi*.

Skemp osserva che anche l'insegnante, come l'allievo, può avere una visione strumentale o relazionale. La situazione ottimale è quella in cui insegnante ed allievo hanno entrambi una visione relazionale, mentre quando insegnante ed allievo condividono una visione strumentale è facile che si instauri quello che Gardner chiama 'compromesso delle risposte corrette'. Le combinazioni più problematiche sono comunque quelle in cui allievo ed insegnante hanno una visione diversa: in questo caso il successo sancito dall'insegnante è diverso dal successo riconosciuto dall'allievo. La combinazione più frequente è senza dubbio quella in cui l'allievo ha una visione strumentale e l'insegnante una visione relazionale: quando l'allievo dice *"ho capito"*, in realtà intende dire una cosa diversa da quella che intende l'insegnante (in genere: *"ho capito come si fa"*). Ma può capitare anche il contrario: che l'allievo abbia una visione relazionale e l'insegnante una visione strumentale. In questo caso per l'allievo 'capire' significa comprendere i perché, le relazioni, mentre per l'insegnante significa applicare correttamente le regole apprese. Questo può contribuire a creare negli allievi meno sicuri la convinzione di non essere adeguati per la matematica (ad esempio perché ritengono di essere gli unici a non capire, visto che i compagni sembrano non avere difficoltà), e a favorire un atteggiamento negativo nei confronti della disciplina:

> Ora me la cavicchio, ma non perché riesco a ragionare sulle formule, ma perché le applico e basta. Sono sicura che se dovessi fare un compito con dei "perché" sulle formule, non sarei in grado nemmeno di scrivere una parola.
> Andando avanti per la mia strada, le equazioni di primo grado, quelle di secondo grado e i radicali nel campo del turismo non servono, ma queste cose le facciamo per imparare a ragionare giusto…?
> Ma se io le faccio perché so le regole ma non le capisco, a cosa mi servono?
> Ci sono persone che passano la loro vita a studiare la matematica, ma io mi chiedo come facciano. Se potessi, la matematica sarebbe una materia che smetterei di studiare, visto che la odio. Penso che questo "sentimento" dipenda dal fatto che il mio studio è stato sempre di tipo mnemonico, meccanico senza la preoccupazione di capire veramente l'esercizio che dovevo svolgere.
> Colpa mia o degli insegnanti? [Giulia, 2.SS]

Questo tema suggerisce un ulteriore elemento di complessità: l'insegnante può avere un approccio relazionale quando insegna, ma accontentarsi di un approccio strumentale quando valuta, ad esempio perché lo ritiene più facile, ed accessibile quindi ad un maggior numero di allievi.

Una visione strumentale della matematica, vista come disciplina fatta di formule da memorizzare, è una visione *epistemologicamente distorta*, in quanto lontana da quella condivisa dagli esperti. L'epistemologia distorta di molti studenti è la loro chiave di lettura dell'esperienza con la matematica: così se un allievo ha una visione strumentale, tenderà ad interpretare le spiegazioni dell'insegnante o del libro di testo come 'istruzioni per l'uso', e la sua visione strumentale ne risulterà in definitiva rafforzata.
Come abbiamo osservato l'epistemologia distorta di un allievo può essere alla base della sua percezione di incontrollabilità della matematica, e quindi della rinuncia a pensare.
Ma la stessa percezione di incontrollabilità può derivare da un basso senso di auto-efficacia, cioè dalla percezione di essere inadeguati rispetto alle richieste della disciplina. Un basso senso di auto-efficacia può avere un effetto paralizzante sull'apprendimento, impedendo di fatto ad un allievo di utilizzare le conoscenze che pure possiede: per investire le energie e le risorse

necessarie per l'apprendimento è necessario infatti credere di avere le risorse (che riteniamo) necessarie, credere *di potercela fare*.
Il basso senso di auto-efficacia non necessariamente ha ripercussioni sull'autostima, vuoi perché il valore che viene attribuito al successo in matematica è basso, vuoi perché tale successo viene attribuito a cause non controllabili come l'essere 'portati':

> Il fatto è che in matematica non basta l'impegno, ma ci vuole un quid che te la faccia capire, io questo quid non ce l'ho. [Michele, 2.SS]
> Le persone 'portate' hanno una base su cui appoggiarsi.
> Le persone 'negate' hanno una base che però è pericolosa può cadere da un momento all'altro. [Pierpaolo, 1.SS]

Questa convinzione trova terreno fertile nella nostra società, che considera l'insuccesso in matematica più naturale del successo, e viene spesso alimentata in famiglia (*"Mio figlio è come me! Non sono portata per la matematica!"*), o addirittura giustificata con contrapposizioni assurde del tipo: *"Non sono portato per la matematica, perché mi piace l'italiano"*.

Ma spesso il basso senso di auto-efficacia si costruisce su esperienze fallimentari ripetute, e su un confronto con i compagni che è fonte di continue frustrazioni:

> Spesso se non sempre mi sentivo frustrato, provavo invidia per i miei compagni soprattutto tra i maschi, quando con disinvoltura riuscivano a svolgere i compiti in classe. Io li guardavo e pensavo come fosse possibile che avessero già terminato il compito, mentre io fossi solo al primo esercizio che non riuscivo neppure a concludere. Li guardavo e vedendo che ero l'ultimo o quasi a dover consegnare il compito mi agitavo e allora sì che la mente mi sembrava più vuota che mai, con lo sguardo cercavo aiuti. [Marco, 5.SS]

Una visione epistemologicamente distorta della matematica e un basso senso di auto-efficacia, spesso presenti nello stesso allievo, favoriscono la percezione di incontrollabilità della matematica e un atteggiamento che potremmo definire di 'fatalismo': la rinuncia a pensare che ne consegue può manifestarsi come rinuncia a rispondere ma anche come tentativo di indovinare la risposta corretta rispondendo a caso.

10. Conclusioni

Le riflessioni fin qui fatte sottolineano la complessità delle interpretazioni possibili per gli errori o le omissioni degli allievi. Questo è particolarmente evidente nel contesto di prove – quali quelle a risposta chiusa - che per loro natura non sempre permettono di evidenziare i processi di pensiero (o la mancanza di processi di pensiero) che stanno alla base delle risposte date.
Abbiamo visto che dietro un errore in matematica ci può essere una varietà di fattori che interagiscono: carenze metacognitive, misconcetti, uso di un linguaggio o di un tipo di pensiero inadeguati rispetto alla matematica, fatalismo. Ad ognuna di queste possibili diagnosi dovrebbe seguire un'azione didattica mirata, che si pone cioè un obiettivo specifico: sviluppare le abilità metacognitive, rimuovere interpretazioni distorte di concetti, sviluppare il linguaggio e il pensiero tipico della matematica (e, a monte, insegnare che esistono un linguaggio e un pensiero tipici della matematica e funzionali ai suoi scopi), rimuovere convinzioni perdenti, quali una visione epistemologicamente scorretta della matematica o un basso senso di auto-efficacia.
Non c'è spazio per descrivere nei dettagli alcune possibili strategie didattiche finalizzate a raggiungere tali obiettivi (per approfondimenti rimando a Zan, 2007). Mi limito quindi ad enunciare alcune indicazioni di carattere generale: d'altra parte le competenze elencate sopra sono così profondamente intrecciate, che ogni azione didattica in grado di intervenire su una di esse produrrà un cambiamento anche nelle altre.

- *Favorire la partecipazione attiva dell'allievo e la sua assunzione di responsabilità attraverso attività che abbiano per lui un 'senso'*

È necessario proporre attività significative dal punto di vista matematico, problemi in cui l'allievo ha la libertà e insieme la responsabilità di esplorare, di congetturare, di proporre soluzioni a quesiti non standard. Solo in questo modo le conoscenze e le abilità che apprende saranno disponibili per essere utilizzate in diversi contesti; in caso contrario rimarranno inerti, utilizzabili solo negli stessi contesti in cui sono state apprese.
Azioni didattiche di questo tipo valorizzano i processi, piuttosto che i prodotti, e intervengono non solo su aspetti metacognitivi, ma anche sulla visione della matematica e sul senso di auto-efficacia dell'allievo.

- *Collegare le richieste dell'uso di un linguaggio specifico ad attività significative, i cui scopi siano condivisi dall'allievo*

Un'azione didattica mirata a sviluppare l'uso del linguaggio matematico deve fare riferimento a contesti e scopi significativi, in cui l'uso del linguaggio matematico non sia solo un'imposizione esterna artificiosa ma sia riconosciuto dall'allievo più efficace rispetto a quello quotidiano. Ad esempio abbiamo visto come nel caso di convenzioni quali l'uso delle parentesi sia importante agganciare questo uso a degli scopi di effettiva comunicazione. È chiaro che questo tipo di intervento va ad incidere ancora una volta sulla visione della matematica che ha l'allievo, e può anche prevenire il formarsi di alcuni misconcetti.

- *Educare gli allievi a riflettere sui propri processi di pensiero, insistendo molto sulla verbalizzazione (cioè chiedendo sistematicamente 'Come hai fatto?', 'Perché hai fatto così?', 'Come hai ragionato?')*

Questo tipo di azione, tipicamente metacognitiva, è cruciale per monitorare le interpretazioni che gli allievi costruiscono dell'esperienza con la matematica, e gioca quindi un ruolo importante nella prevenzione o superamento di misconcetti, di una visione distorta della matematica, di un basso senso di auto-efficacia.

- *Favorire negli allievi la consapevolezza delle proprie risorse, e l'attivazione di strategie per diminuire l'effetto di eventuali punti deboli*

Alcuni allievi sono vittime della propria lentezza, della propria disattenzione, del proprio approccio ad un testo scritto. A volte non sono neanche consapevoli dei propri punti deboli, spesso comunque li accettano come inevitabile causa di insuccesso. L'insegnante può suggerire all'allievo strategie per minimizzare l'effetto di questi punti deboli, pur non rinunciando a lavorare per superarli.
Un intervento di questo tipo può avere evidentemente importanti effetti anche sul senso di auto-efficacia.

- *Insegnare ad attivare processi di controllo*

I processi di controllo sono cruciali in genere nell'attività di soluzione di problemi di qualsiasi tipo (il cosiddetto *problem solving*). Quando si affronta un problema di matematica si devono attivare continuamente processi di controllo (dal sincerarsi di aver compreso il problema, al controllo del tempo a disposizione, dei passaggi, dei risultati, …).
L'attivazione di processi di controllo è una strategia utile anche per riconoscere e rimuovere eventuali misconcetti. Nell'esempio delle altezze di un triangolo (come in altri casi in cui è coinvolta la definizione di un concetto matematico), l'insegnante può educare l'allievo a ritornare alla definizione matematica dell'oggetto in questione, a rileggerla con attenzione, a confrontare il procedimento scorretto con tale definizione. L'esempio fatto descrive un tipico processo di controllo interno alla matematica: invece in genere quando uno studente attiva processi di controllo, si tratta di un controllo 'esterno' (*"sono sicuro che il mio procedimento è giusto perché il risultato è uguale a quello del più bravo della classe"*, *"perché mi viene un numero convincente"*, …).

- *Creare un clima di classe collaborativo e rilassato sia fra allievi che fra allievi e insegnante, in cui l'errore è visto da ambedue le parti in modo sereno e costruttivo*

Questa è la condizione necessaria perché tutte le altre strategie possano risultare efficaci. In particolare è importante che l'insegnante per individuare misconcetti possa contare sulla collaborazione dell'allievo, che è l'unico in grado di descrivere qual è stato il ragionamento che l'ha portato ad una certa risposta (e questo ancora una volta sottolinea il ruolo della capacità di descrivere i propri processi di pensiero e delle competenze linguistiche). L'individuazione di misconcetti può avvenire anche attraverso la *discussione matematica* (si veda ad esempio Bartolini Bussi, Boni e Ferri, 1995), che costituisce anche un contesto naturale per il confronto fra posizioni diverse nella classe e quindi per la produzione di argomentazioni a sostegno della propria posizione.

- *Non rimanere chiusi nella propria 'cornice', ma cercare di capire qual è la cornice in cui si muove l'allievo*[9]

Capita che ci siano errori o procedimenti dei nostri allievi che ci appaiono privi di razionalità. Spesso questo giudizio riconosce più o meno implicitamente la razionalità matematica come unica forma legittima. Non c'è dubbio che la razionalità matematica è importante, ed è proprio la forma di razionalità che noi insegnanti di matematica abbiamo il compito di sviluppare: ma questo non significa che sia l'unica possibile. In particolare per sviluppare il pensiero logico è importante formulare problemi e situazioni in modo che il pensiero narrativo, la conoscenza enciclopedica dell'allievo, il suo vissuto, siano una risorsa e non un ostacolo.

Queste indicazioni generali trovano un contesto naturale di applicazione nel problem solving (inteso come attività di soluzione di problemi che siano davvero tali, e non esercizi standard e ripetitivi), che costituisce quindi una strategia didattica formidabile per prevenire e superare le difficoltà in matematica.

Il problem solving permette di cogliere il senso di certi strumenti matematici e di apprezzarne la potenza. Appare inoltre il contesto ideale per lo sviluppo di processi di controllo; un contesto naturale per imparare a prendere *decisioni*, stimolando l'allievo ad assumersi la responsabilità delle proprie scelte, e favorendo quindi il passaggio della responsabilità dell'apprendimento dall'insegnante all'allievo.

Inoltre l'attività di soluzione di problemi può contribuire a sradicare una visione distorta dell'attività matematica, ridotta alla memorizzazione di una lista di formule ed alla loro applicazione ad esercizi tutti simili, e ad aumentare la fiducia nelle proprie capacità, laddove c'è la percezione dei progressi fatti.

Il problem solving è anche una palestra di educazione emozionale, in cui l'allievo può imparare a riconoscere e gestire le emozioni negative ed a sostenere l'azione intrapresa nonostante gli inevitabili momenti di difficoltà e di blocco. È quindi anche un contesto naturale da un lato per educare alla gestione di alcune tipiche emozioni negative associate alla matematica, quali ansia, rabbia, frustrazione, dall'altro per scoprire emozioni positive quali curiosità e soddisfazione.

[9] Suggerisco a questo proposito la lettura del libro di Marianella Sclavi: *Arte di ascoltare e mondi possibili. Come si esce dalle cornici di cui siamo parte* (2003).

FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Lo spazio naturale per attività di problem solving è il *laboratorio di matematica*, inteso come

> una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici. [...]
> Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).
> L'ambiente del laboratorio è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti [MATEMATICA 2003, p. 23[10]].

Nel laboratorio viene quindi valorizzato il lavoro collaborativo fra gli allievi, e il ruolo dell'insegnante diventa quello di fare domande per stimolare processi di pensiero significativi, piuttosto che di dare risposte per guidare semplicemente verso la soluzione corretta.

In conclusione, per quanto possa essere locale il processo di osservazione legato al riconoscimento di un errore, il processo di interpretazione – e quindi il *piano di miglioramento* che ne segue - può aprire scenari ben più ampi, che coinvolgono aspetti cognitivi, ma anche metacognitivi e affettivi, e che evidenziano in ogni caso l'importanza delle competenze linguistiche.
L'errore osservato è allora solo l'inizio di un percorso che chiama in causa la professionalità dell'insegnante, nel formulare ipotesi interpretative, nel predisporre ulteriori osservazioni, nel pianificare azioni didattiche mirate.

Per questo motivo ritengo che la criticità evidenziata dalla classe in un ambito specifico della matematica debba stimolare l'insegnante verso un'azione didattica che pur calata in tale ambito, non si limiti a ripercorrere e approfondire gli argomenti interessati, ma utilizzi quell'ambito di conoscenze come contesto per esplorare nuove metodologie, centrate sull'allievo e attente alla relazione allievo/insegnante: il problem solving, il laboratorio di matematica, la verbalizzazione, la discussione collettiva, il lavoro in classe collaborativo.

---

[10] *MATEMATICA 2003 - Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica* - è dedicato al ciclo secondario. Un'iniziativa analoga per il primo ciclo è *MATEMATICA 2001 - Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media)*. Dedicato invece alla quinta classe del ciclo secondario di secondo grado è *MATEMATICA 2004 - Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculo di matematica.* I tre documenti, alla cui stesura hanno collaborato l'Unione Matematica Italiana ed il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca sono attualmente scaricabili dal sito dell'Unione Matematica Italiana (http://umi.dm.unibo.it).

L'osservazione dell'errore degli allievi diventa allora per l'insegnante un'occasione per riflettere sulla propria pratica, per conoscere meglio i propri allievi, per esplorare nuovi scenari e nuove possibilità di insegnamento: in definitiva un'occasione di apprendimento.

È con questa prospettiva a mio parere che vanno lette le proposte didattiche elaborate all'interno del PQM: non solo come esempi di buone pratiche per presentare un argomento specifico, ma come modelli generalizzabili di una buona didattica in grado di prevenire e superare problemi più globali.

Unione Europea FONDI STRUTTURALI EUROPEI pon 2007-2013 MIUR
COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) A-2-FSE-2009-2
Agenzia Nazionale per lo Sviluppo dell'Autonomia Scolastica ex Indire
INVALSI

Riferimenti

Bartolini Bussi M.G., Boni M., Ferri F. (1995). *Interazione e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Modena: Centro Documentazione Educativa.

Bruner J. (1986). *Actual Minds, Possible Worlds*. Cambridge: Harvard University Press (tr. it. *La mente a più dimensioni*. Bari: Laterza, 2003).

Bruner J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge: Harvard University Press (tr. it. *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale.* Torino: Bollati Boringhieri, 1992).

Cobb P. (1985). Two Children's Anticipations, Beliefs, and Motivations. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 111-126.

Di Martino P., Zan R. (2005). Raccontare il contare: l'incontro scontro con la matematica nei resoconti degli allievi. In Gisfredi P. (a cura di) *Itinerari tra storie e cambiamento. Momenti e processi formativi*. Bologna: CLUEB, 105-124.

Donaldson M. (1978). *Children's minds.* London: Fontana Press (tr. it. *Come ragionano i bambini*. Milano: Springer, 2009).

Enriques F. (1936). *Il significato della storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.

Ferrari P.L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 26A (4), 469-496.

Ferrari P.L. (2005). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Gardner H. (1991). *The Unschooled Mind: How children think and how schools should teach.* New York: Basic Books (tr. it. *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico.* Milano: Feltrinelli, 1993).

Krygowska A.Z. (1957). Sul pericolo del formalismo e del verbalismo nell'insegnamento dell'algebra. *Archimede*, 4-5, 165-177.

Popper K. (1972). *Objective Knowledge an Evolutionary Approach*. Oxford: Clarendon Press (tr. it. *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico.* Roma: Armando, 2002).

Postman N., Weingartner C. (1969). *Teaching as a Subversive Activity*. New York: Delta (tr. it. *L'insegnamento come attività sovversiva*. Firenze: La Nuova Italia, 1973).

Sclavi M. (2003). *Arte di ascoltare e mondi possibili. Come si esce dalle cornici di cui siamo parte.* Milano: Bruno Mondadori.

Skemp R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire.* Milano: Springer.